

《統計學》

一、二因子（假設二因子皆固定的，fixed factors）變異數分析表如下：

變異來源	平方和	自由度	均方	F值
因子1	450	2	A	F1
因子2	3.5	3	B	F2
交互作用	246.5	C	D	F3
誤差	E	F	G	
總和	750	23		

(一)請填入表格中A,B,C,D,E,F,G,F1,F2,F3的數值。(10分)

(二)在顯著水準0.05下，檢定因子1，因子2，和交互作用是否顯著（寫出虛無假設和對立假設，說明檢定統計量之分配及檢定之結果）。(15分)

試題評析	本題是考二因子考慮交互作用之變異數分析，屬於基本計算考題，要拿到分數並不難。
考點命中	《高點統計學講義》第四回，趙治勳編撰，頁46。

答：

(一) A=225, B=1.1667, C=6, D=41.0833, E=50, F=12, G=4.1667, F1=54, F2=0.28, F3=9.86

(二) 假設 $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$, $\varepsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

$$i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad k = 1, 2$$

檢定因子1：

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \text{ vs } H_1: \text{至少一個 } \mu_i \neq \mu_j$$

$$\text{T.S.: } F_1 = \frac{MSA}{MSE} \sim F_{(2,12)}$$

$$\text{R.R.: Reject } H_0 \text{ at } \alpha = 0.05 \text{ if } F_1^* > F_{0.05(2,12)} = 3.89$$

$$\because F_1^* = 54 \therefore \text{reject } H_0$$

我們有足夠證據去推論因子1對應變數有顯著的影響

檢定因子2：

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \text{ vs } H_1: \text{至少一個 } \mu_i \neq \mu_j$$

$$\text{T.S.: } F_2 = \frac{MSB}{MSE} \sim F_{(3,12)}$$

$$\text{R.R.: Reject } H_0 \text{ at } \alpha = 0.05 \text{ if } F_2^* > F_{0.05(3,12)} = 3.49$$

$$\because F_2^* = 0.28 \therefore \text{don't reject } H_0$$

我們沒有足夠證據去推論因子2對應變數有顯著的影響

檢定交互作用：

$$H_0: \text{交互作用不存在 vs } H_1: \text{交互作用存在}$$

$$\text{T.S.: } F_3 = \frac{MSAB}{MSE} \sim F_{(6,12)}$$

$$\text{R.R.: Reject } H_0 \text{ at } \alpha = 0.05 \text{ if } F_3^* > F_{0.05(6,12)} = 3$$

$$\because F_3^* = 9.86 \therefore \text{reject } H_0$$

我們有足夠證據去推論因子1與因子2交互作用存在

【版權所有，重製必究！】

二、電器公司想了解冷氣機銷售量 (y) 和在電視上做廣告次數 (x) 之關係，隨機抽取之數據如下表：

x	y
4	52
7	59
3	43
5	56
6	56
3	40
9	65
5	50

(一) 畫出y和x之散布圖並依散布圖寫出y和x的迴歸模式。(5分)

(二) 迴歸模式中的參數之最小平方估計值為何？(10分)

(三) 以迴歸模式中的斜率估計值計算y和x的相關係數。(5分)

(四) 以(三)計算得的相關係數計算判定係數 (coefficient of determination)。(5分)

試題評析 本題是考簡迴歸，屬於基本計算考題，要拿到分數並不難。

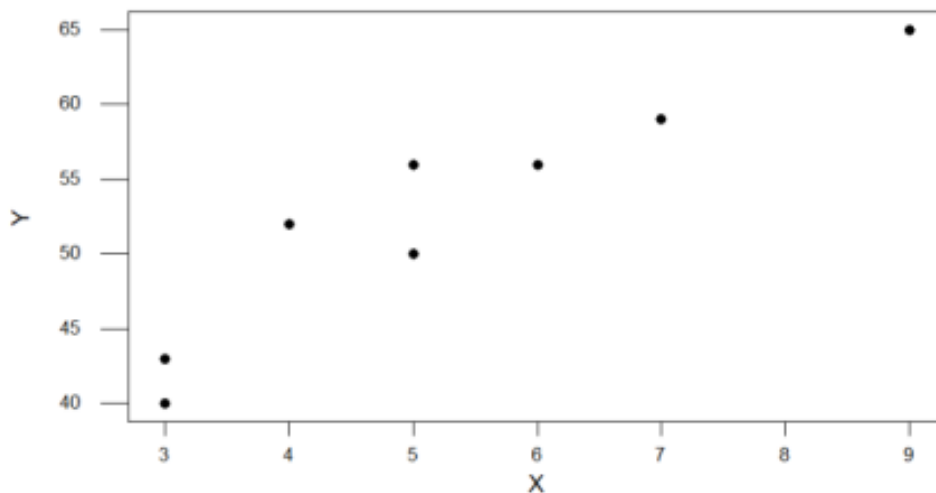
考點命中 《高點迴歸分析熱門題庫》第二篇第二章，趙治勳編撰。

答：

$$\sum X_i = 42, \sum X_i^2 = 250, \sum Y_i = 421, \sum Y_i^2 = 22631, \sum X_i Y_i = 2321$$

$$SS_{XY} = 110.75 \quad SS_X = 29.5 \quad SS_Y = 475.875$$

(一) 迴歸模型: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad i = 1, 2, \dots, 8$



$$(二) \hat{\beta}_1 = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = 3.754$$

$$(三) r_{XY} = \hat{\beta}_1 \frac{\sqrt{SS_X}}{\sqrt{SS_Y}} = 0.9347$$

$$(四) R^2 = r_{XY}^2 = 0.8737$$

【版權所有，重製必究！】

三、假設隨機變數 $X_i, i=1,2,\dots,n$ ，為互相獨立的常態分配，期望值為 μ ，且變異數為 σ^2 。

$$\text{令 } p = P(|X_i - \mu| \leq 2\sigma), I_i = \begin{cases} 1 & \text{, 若 } |X_i - \mu| \leq 2\sigma \\ 0 & \text{, 其他} \end{cases}, \text{ 且 } M = \sum_{i=1}^n I_i.$$

(一) 計算 p 值。(5分)

(二) 說明 M 之分配為何?(5分)

(三) 計算機率, $P(M=2)$ 。(5分)

(四) 計算 I_i 之變異數。(5分)

(五) 以柴比雪夫定理 (Chebyshev's theorem) 計算 p 值或 p 值之範圍。(5分)

試題評析	本題綜合了各單元內容出題，包含常態分配、二項分配、柴比雪夫不等式；A 屬於基本計算考題，要拿到分數並不難。
考點命中	《高點統計學講義》第一回，趙治勳編撰，4.5 節、第二回 5.2 節，6.3 節。

答：

(一) $p = P(|X_i - \mu| \leq 2\sigma) = P(|Z| \leq 2) = 1 - 2 \times 0.0228 = 0.9544$

(二) $I_i \sim \overset{iid}{Ber}(p = 0.9544)$

$$M = \sum I_i \sim Bin(n, p = 0.9544)$$

(三) $P(M = 2) = \binom{n}{2} 0.9544^2 0.0456^{n-2}$ (沒有給 n , 列計算式)

(四) $\because I_i \sim \overset{iid}{Ber}(p = 0.9544) \therefore V(I_i) = (0.9544)(0.0456) = 0.04352$

(五) $p = P(|X_i - \mu| \leq 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, 故 p 之範圍 $[0.75, 1]$

四、令隨機變數 X 和 Y 分別為兩獨立零件之壽命，其機率密度函數 (pdf) 分別為

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}, y \geq 0.$$

(一) 令隨機變數 Z 為產品之壽命，而產品之壽命即兩零件壽命之和。請推導出 Z 之 pdf，並說明 Z 為那個分配。(10分)

(二) 令 $W = \min(X, Y)$ ，即 W 為兩零件壽命中之較短壽命，請推導出 W 的 pdf，並說明 W 為那個分配。(10分)

(三) 計算機率， $P(W < 10)$ ，其中 $W = \min(X, Y)$ 。(5分)

試題評析	本題是隨機變數之變數變換，雖然數學推導較多，但考古題中已經出現過類似的考題，要拿到分數並不難。
考點命中	《高點統計學講義》第一回，趙治勳編撰，頁 90。

答：

(一) $Z = X + Y$

$$M_Z(t) = E(e^{Zt}) = E(e^{(X+Y)t}) = E(e^{Xt} e^{Yt}) = E(e^{Xt}) E(e^{Yt}) = M_X(t) M_Y(t)$$

$$= \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-2}, t < \lambda$$

由 m.g.f. 唯一性， $Z = X + Y \sim \text{Gamma}(\alpha = 2, \lambda)$

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^2}{\Gamma(2)} z^{2-1} e^{-\lambda z} = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, 0 < z < \infty$$

【版權所有，重製必究！】

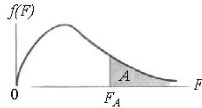
$$\begin{aligned}
 \text{(二)} \quad F_W(w) &= P(W \leq w) = P(\min(X, Y) \leq w) = 1 - P(\min(X, Y) > w) \\
 &= 1 - P(X > w \cap Y > w) = 1 - P(X > w)P(Y > w) \\
 &= \begin{cases} 0 & , w < 0 \\ 1 - e^{-2\lambda w} & , 0 \leq w \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$f_W(w) = \frac{dF_W(w)}{dw} = 2\lambda e^{-2\lambda w}, 0 < w < \infty \quad W \sim \text{Exp}(2\lambda)$$

$$\text{(三)} \quad P(W < 10) = 1 - e^{-2\lambda(10)} = 1 - e^{-20\lambda}$$

附統計表：F 表和 Z 值表


Critical Values of the F-Distribution: A = .05



v ₂	NUMERATOR DEGREES OF FREEDOM																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245	246	246	247	247	248	248
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07	2.05	2.03	2.02	2.00	1.99
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11	2.07	2.04	2.01	1.99	1.96	1.94	1.92	1.91	1.89	1.88
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84
45	4.06	3.20	2.81	2.58	2.42	2.31	2.22	2.15	2.10	2.05	2.01	1.97	1.94	1.92	1.89	1.87	1.86	1.84	1.82	1.81
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86	1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.75
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.93	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.77	1.75	1.74	1.72
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.76	1.74	1.72	1.70	1.69
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83	1.80	1.78	1.75	1.73	1.71	1.69	1.67	1.66
140	3.91	3.06	2.67	2.44	2.28	2.16	2.08	2.01	1.95	1.90	1.86	1.82	1.79	1.76	1.74	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65
160	3.90	3.05	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.81	1.78	1.75	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65	1.64
180	3.89	3.05	2.65	2.42	2.26	2.15	2.06	1.99	1.93	1.88	1.84	1.81	1.77	1.75	1.72	1.70	1.68	1.66	1.64	1.63
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.69	1.67	1.66	1.64	1.62
∞	3.84	3.00	2.61	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.72	1.69	1.67	1.64	1.62	1.60	1.59	1.57

【版權所有，重製必究！】

Cumulative Standardized Normal Probabilities



$P(-\infty < Z \leq z)$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

【版權所有，重製必究！】