

《統計學》

試題評析	108高考統計行政組別統計學題目也是考四大題，題目整體而言偏簡單，考場上一定要詳細檢查是否有簡單的計算錯誤。 第一題為最小順序統計量的題目，地特考古題有類似題。 第二題與普考的聯合分配題型相當類似，這二份應該是同位一老師出題。 第三題是卡方檢定中的適合度檢定計算量較大，建議最後在寫，還好出題老師有將資料排序。 第四題是變異數分析，考到近幾年較少考的事後比較，方法是最簡單的LSD。
考點命中	第一題：《高點·高上統計學講義》第一回，蘇建郎編撰，頁91，ch5-5順序統計量。 《高點·高上統計學講義》第二回，蘇建郎編撰，頁86，ch4-5一維常用分配連續型。 第二題：《高點·高上統計學講義》第二回，蘇建郎編撰，頁24，ch3-3多維隨機變數。 第三題：《高點·高上統計學講義》第四回，蘇建郎編撰，頁33~34，ch10-1 適合度檢定。 第四題：《高點·高上統計學講義》第四回，蘇建郎編撰，頁5、11，ch8-2完全隨機設計與多重比較。

一、假設 X 和 Z 為獨立的隨機變數，其 X 的機率密度函數 (probability density function (pdf)) 為 $f_X(x) = 2e^{-2x}$, $x \geq 0$, Z 的 pdf 為 $f_Z(z) = 3e^{-3z}$, $z \geq 0$ 。

設 $Y = \min(X, Z)$ (即 X 和 Z 的最小值), $U = E(Y) + 2\sqrt{V(Y)}$ 且 $L = E(Y) - 2\sqrt{V(Y)}$ 其中 $E(Y)$ 為 Y 的期望值, $V(Y)$ 為 Y 的變異數。

(一)請推導出 Y 的 pdf。(7分)

(二)若 $L < Y < U$ 則判為正常；否則為異常。試計算正常的機率 (即 $P(L < Y < U)$)。(5分)

(三)承(二)子題，若自 Y 的分配隨機抽取樣本大小為 5 的一個樣本組。試問有 3 個正常和 2 個異常的機率。(8分)

答：

(一)

$$Y = \min(X, Z), X \sim F_X(x) = 1 - e^{-2x} I_{[0, \infty)}(x), X \sim F_Z(z) = 1 - e^{-3z} I_{[0, \infty)}(z)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\min(X, Z) \leq y) = 1 - P(\min(X, Z) > y) = 1 - P(X > y)P(Z > y)$$

$$= 1 - e^{-2y}e^{-3y} = 1 - e^{-5y}, y \geq 0$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 5e^{-5y}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

(二)

$$Y \sim \exp(\lambda = 5) \Rightarrow E(Y) = \frac{1}{5} = 0.2, \text{Var}(Y) = \frac{1}{25} = 0.04$$

$$L = 0.2 - 2 \times 0.2 = -0.2, U = 0.2 + 2 \times 0.2 = 0.6$$

$$P(L < Y < U) = P(-0.2 < Y < 0.6) = P(0 < Y < 0.6), \text{【版權所有，重製必究！】}$$

$$= \int_0^{0.6} 5e^{-5y} dy = 1 - e^{-3} = 0.9502$$

(三)

令隨機變數 W 為抽樣 5 個中正常之個數，即 $W \sim B(n = 5, p = 0.9502)$

$$\text{計算 } P(W = 3) = C_3^5 (0.9502)^3 (0.0498)^2 = 0.0213$$

二、假設 (X, Y) 的聯合機率密度函數 (joint probability density function (joint pdf)) 為

$$f(x, y) = 0.5dxy, \quad 0 \leq x, y \leq 1, x + y \leq 1.$$

(一)計算 d 值。(5 分)

(二)推導求得 X 的邊際機率密度函數 (Marginal pdf of X) 和計算機率 $P(X \leq 0.25)$ 。(10 分)

(三)計算 $3X$ 的期望值 ($E(3X)$)。(5 分)

(四)計算 $5+2XY$ 的期望值 ($E(5+2XY)$)。(5 分)

答：

(一)

$$1 = \int_0^1 \int_0^{1-y} 0.5dxy \, dx dy = d \int_0^1 \int_0^{1-y} 0.5xy \, dx dy = d \frac{1}{48} \Rightarrow d = 48$$

$$\text{且 } f_{X,Y}(x, y) = 24xy \geq 0, \quad \forall 0 \leq x, y \leq 1, x + y \leq 1$$

(二)

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 24xy dy = 12x(1-x)^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$P(0 \leq X \leq 0.25) = \int_0^{0.25} 12x(1-x)^2 dx = \frac{67}{256} = 0.2617$$

(三)

$$X \sim \text{Beta}(\alpha = 2, \beta = 3) \Rightarrow E(X) = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$\text{則 } E(3X) = \frac{6}{5} = 1.2$$

(四)

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^{1-y} xy 24xy \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 24x^2 y^2 \, dx dy = \frac{2}{15}$$

$$\text{故 } E(5 + 2XY) = 5 + 2E(XY) = 5 + \frac{4}{15} = \frac{79}{15} = 5.2667$$

三、下列數值為用簡單隨機抽樣法抽取的 A 公司 32 位銷售人員在 2010 年的汽車銷售數量：

15	20	25	25	30	35	35	35	40	40
40	45	45	45	45	50	50	50	50	55
55	55	55	60	60	60	60	65	65	65
70	70								

請檢定 A 公司所有銷售人員在 2010 年的銷售數量是否為常態分配？

顯著水準為 0.1。(檢定時請將常態分配下的銷售數量分成 4 個區間，使得每個區間的次數為 8，寫出 (1) 虛無假設 (H_0) 和對立假設 (H_1)，(2) 檢定統計量在 H_0 為真下的分配和自由度，及 (3) 分別以 p 值 (p value) 和拒絕區的臨界值說明檢定結果) (25 分)

答：

(1) H_0 ：資料服從常態分配

H_1 ：資料不服從常態分配， $\alpha = 0.1$

(2)估計參數個數 $m = 2$ ，32筆資料樣本平均數 $\bar{x} = 47.34$

與樣本標準差 $s = 14.59$ ， $z_{0.25} = 0.67$

$$q_1 = 47.34 - 0.67 \times 14.59 = 37.57$$

$$q_3 = 47.34 + 0.67 \times 14.59 = 57.12$$

銷售量	37以下	38~47	48~57	58以上	合計
o_i	8	7	8	9	32
e_i	8	8	8	8	32

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(|o_i - e_i| - 0.5)^2}{e_i} = 0.125$$

自由度 $4 - 1 - m = 1$

(3)

$$\alpha = 0.1, \text{ 拒絕域 } C = \{\chi^2 \mid \chi^2 > \chi_{0.1}^2(4 - 1 - m) = \chi_{0.1}^2(1) = 2.705541\}$$

$$\chi^2 = 0.125 \notin C, \text{ don't reject } H_0$$

$p\text{-value} = P(\chi^2(1) > 0.125)$ ，查表可知 $0.9 < p\text{-value} < 0.95$ 之間非常大，給定顯著水準 α 下很難拒絕。
故在顯著水準 $p\text{-value} > \alpha = 0.1$ 不拒絕 H_0 ，即銷售人員在2010 年的銷售數量為常態分配。

四、牙醫師想知道假牙材質供應商提供的3種不同品牌材質（A、B、C）是否影響假牙的使用壽命，經由統計實驗設計方法收集的各品牌下病人假牙的使用壽命數據如下：

品牌	壽命（單位：年）				
A	8	8	8	9	9
B	10	12	11	12	10
C	7	8	7	6	7

假設參與實驗的 15 位病人是隨機抽取自每個人的體質、習慣和牙齒完全無差異的母體（即假設實驗單位是一致的）。

(一)請說明這些壽命數據（觀測值）是使用何種統計實驗設計方法收集的，並說明實驗如何執行？（6分）

(二)欲檢定品牌材質是否影響假牙的使用壽命，請寫出子題(一)觀測值的效應模式（effects model）及假設條件。（6分）

(三)請依據子題(二)，寫出檢定的虛無假設（ H_0 ）和對立假設（ H_1 ），寫出檢定統計量在 H_0 為真下的分配和自由度，並列出變異數分析表以說明檢定結果。顯著水準為0.05。（10分）

(四)請依據子題(三)的檢定結果，以 Fisher's Least Significant Difference (LSD) 方法兩兩檢定品牌下的平均壽命是否相等，並決定出那種品牌材質的使用壽命最長。顯著水準為0.05。

（寫出檢定的虛無假設（ H_0 ）和對立假設（ H_1 ），檢定統計量在 H_0 為真下的分配和自由度，並說明檢定結果）（8分）

答：

(一)完全隨機設計，且實驗(15病人)的順序也隨機的，第1~15位病人對應的品牌ABC，例如：
AABCBACBCBCACA。

(二)模型假設： $Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ ， $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ，供應商提供的只有這 3 種不同品牌材質為固定效應模式。

(三)

$$\textcircled{1} \begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C \\ H_1 : \text{not } H_0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2}$$

ANOVA table

Source	SS	df	MS	F*
處理	7.6	2	3.8	1.12
誤差	40.8	12	3.4	
合計	48.4	14		

$$\textcircled{3} \alpha = 0.05, C = \{F^* \mid F^* > F_{0.05}(2, 12) = 4.26\}, F^* = 1.12 \notin C$$

don't reject H_0

④ 故在 $\alpha = 0.05$ 情況下，根據樣本資料顯示，我們沒有證據說 μ_i 不完全相等，即三種不同品牌材質對假牙的使用壽命無影響。

(四) 最小顯著差異 (Least significant Difference, LSD)

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-k) = t_{0.025}(12) = t_{0.025}(12) = 2.18$$

$$\text{比較 } |\bar{X}_i - \bar{X}_j| \text{ 與 } t_{\frac{\alpha}{2}}(n-k) \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = 2.18 \times \sqrt{3.4 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.54$$

$\mu_A - \mu_B$: $|8.4 - 8.6| = 0.2 < 2.54$ ，則 μ_A 跟 μ_B 兩個母體平均數沒有顯著差異。

$\mu_A - \mu_C$: $|8.4 - 7| = 1.4 < 2.54$ ，則 μ_A 跟 μ_C 兩個母體平均數沒有顯著差異。

$\mu_B - \mu_C$: $|8.6 - 1| = 1.6 < 2.54$ ，則 μ_B 跟 μ_C 兩個母體平均數沒有顯著差異。

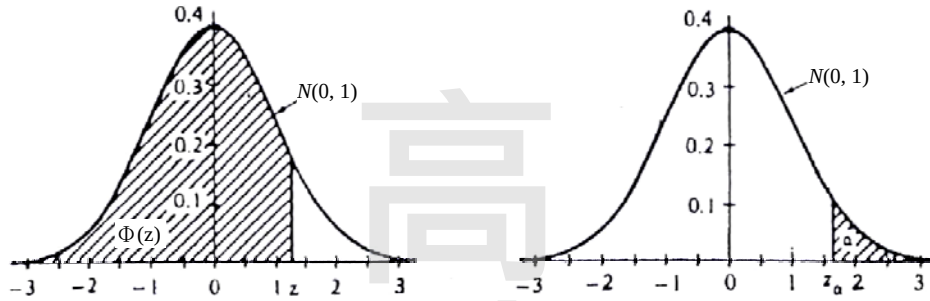
結論與題(三)一致，三種不同品牌材質對假牙的使用壽命無影響

(此題由上一小題就可以知道不用做事後比較，一定不顯著，且只有8分要寫三個檢定，同學在考場上，可以將想法寫給老師即可)

【版權所有，重製必究！】

表一

附表：Z 值表



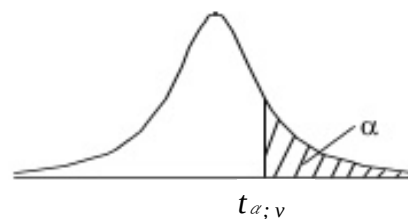
$$P(Z \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw$$

$$[\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)]$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
α	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001	
Z _α	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	
Z _{α/2}	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.240	2.576	2.807	3.291	

表二

附表：t 值表

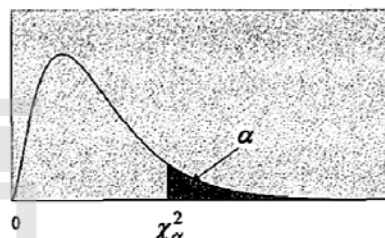
Table of the Student's t -distributionThe table gives the values of $t_{\alpha;v}$ where $\Pr(T_v > t_{\alpha;v}) = \alpha$, with v degrees of freedom

$\alpha \backslash v$	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

表三

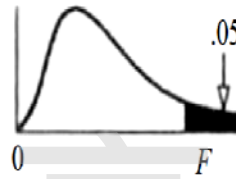
附表：卡方分配臨界值表

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha}) = \alpha$$



<i>d.f.</i>	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.950}$	$\chi^2_{0.900}$	$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.050}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.010}$
1	0.0000393	0.0009821	0.0039322	0.0157907	2.705541	3.841455	5.023903	6.634891
2	0.0100247	0.0506357	0.1025862	0.2107208	4.605176	5.991476	7.377779	9.210351
3	0.0717235	0.2157949	0.3518460	0.5843755	6.251394	7.814725	9.348404	11.3449
4	0.206984	0.484419	0.710724	1.063624	7.779434	9.487728	11.1433	13.2767
5	0.411751	0.831209	1.145477	1.610309	9.236349	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.675733	1.237342	1.635380	2.204130	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	0.989251	1.689864	2.167349	2.833105	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.344403	2.179725	2.732633	3.489537	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	1.734911	2.700389	3.325115	4.168156	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.155845	3.246963	3.940295	4.865178	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	2.603202	3.815742	4.574809	5.577788	17.2750	19.6752	21.9200	24.7250
12	3.073785	4.403778	5.226028	6.303796	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	3.565042	5.008738	5.891861	7.041500	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.074659	5.628724	6.570632	7.789538	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	4.600874	6.262123	7.260935	8.546753	22.3071	24.9958	27.4884	30.5780
16	5.142164	6.907664	7.961639	9.312235	23.5418	26.2962	28.8453	31.9999
17	5.697274	7.564179	8.671754	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	6.264766	8.230737	9.390448	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8052
19	6.843923	8.906514	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908
20	7.433811	9.590772	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5663
21	8.033602	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	8.642681	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9245	36.7807	40.2894
23	9.260383	11.6885	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6383
24	9.886199	12.4011	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	10.5196	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3140
26	11.1602	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9231	45.6416
27	11.8077	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9628
28	12.4613	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3372	44.4608	48.2782
29	13.1211	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5569	45.7223	49.5878
30	13.7867	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
40	20.7066	24.4331	26.5093	29.0505	51.8050	55.7585	59.3417	63.6908
50	27.9908	32.3574	34.7642	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1538
60	35.5344	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0820	83.2977	88.3794
80	51.1719	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.879	106.629	112.329
100	67.3275	74.2219	77.9294	82.3581	118.498	124.342	129.561	135.807

表四

附表：F_{0.05}(v1, v2)值表

		Degrees of Freedom for the Numerator															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40
Degrees of Freedom for the Denominator	1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251
	2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
	3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59
	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72
	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46
	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77
	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34
	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04
	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83
	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66
	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53
	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43
	13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34
	14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27
	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20
	16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15
	17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10
	18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06
	19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03
	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99
	21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96
	22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94
	23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91
	24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89
	25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87
	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79
	40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69
	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59
	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50
	∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39