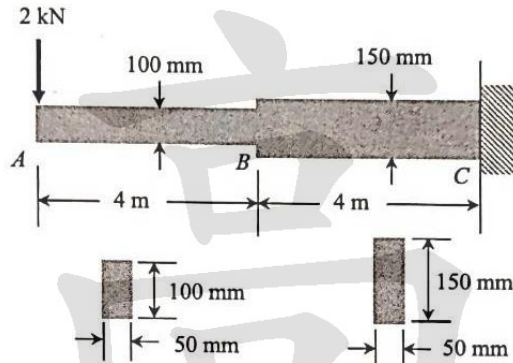


《工程力學(包括材料力學)》

一、如圖示懸臂梁，由兩不同深度的矩形斷面的桿件組成。其寬度均為 50 mm，深度分別為 100 mm 及 150 mm。試求該梁的最大的彎曲應力。(25 分)



試題評析	本題算是非常簡單的題目，將AB段與BC段各自最大彎曲應力先算出來再取大值即為答案，因為是矩形斷面所以採用斷面模數S進行計算會是最方便的。
考點命中	1. 《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題4.1.14。 2. 《材料力學(上)》，高點文化出版，程中鼎編著，例題4.1.6。

解：

1. 計算各桿段最大彎矩 M_{\max}

$$\text{AB段最大彎矩 } M_{\max,AB} = (2)(4) = 8 \text{ kN-m}$$

$$\text{BC段最大彎矩 } M_{\max,BC} = (2)(4+4) = 16 \text{ kN-m}$$

2. 計算梁內最大彎曲應力 σ_{\max}

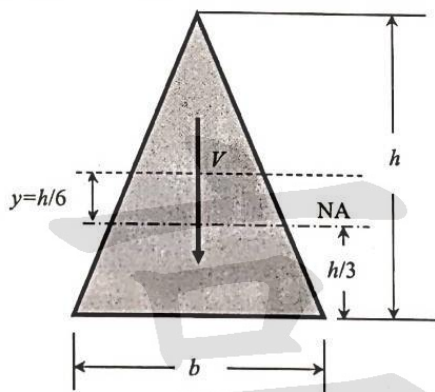
$$\text{AB段最大彎曲應力 } \sigma_{\max,AB} = \frac{M_{\max,AB}}{S_{AB}} = \frac{8 \times 10^6}{\left(\frac{50 \times 100^2}{6}\right)} = 96 \text{ MPa}$$

$$\text{BC段最大彎曲應力 } \sigma_{\max,BC} = \frac{M_{\max,BC}}{S_{BC}} = \frac{16 \times 10^6}{\left(\frac{50 \times 150^2}{6}\right)} = 85.333 \text{ MPa}$$

比較兩段最大彎曲應力值，可知該梁最大彎曲應力發生在AB段之B點位置，

其值為 $\sigma_{\max} = \sigma_{\max,AB} = \underline{96 \text{ MPa}}$ 。

二、圖示為某直梁之三角形斷面，若斷面上受剪力 V 的作用。試推證斷面上最大的剪應力發生在 $y=h/6$ 處。(25 分)



試題評析	對於三角形斷面最大撓曲剪應力不會出現在N.A.，每年上課程老師都有提、小考也有考過，只不過這題是推導題型，只要掌握Q值計算一樣是非常簡單的！
考點命中	1. 《材料力學(上)》，高點文化出版，程中鼎編著，例題4.2.4。

解：

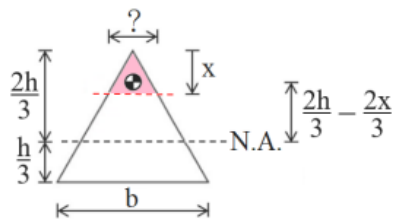
1. 計算斷面任意位置處之面積一次矩 Q_x

採用梁斷面最上緣作為 x 起算點，往下 x 位置處之斷面寬度為：

$$\frac{h}{b} = \frac{x}{?} \Rightarrow ? = \frac{b}{h}x$$

x 位置處對中性軸(N.A.)之面積一次矩 Q_x ：

$$Q_x = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{h}x\right)(x)\left(\frac{2h}{3} - \frac{2x}{3}\right) = \frac{bx^2}{3h}(h-x)$$



2. 推證斷面最大撓曲剪應力發生在 $y = h/6$ 位置

$$x \text{ 位置處之撓曲剪應力值 } \tau_x = \frac{VQ_x}{Ib_x} = \left(\frac{V}{I}\right)\left[\frac{\frac{bx^2}{3h}(h-x)}{\frac{b}{h}x}\right] = \frac{V}{3I}(hx - x^2)$$

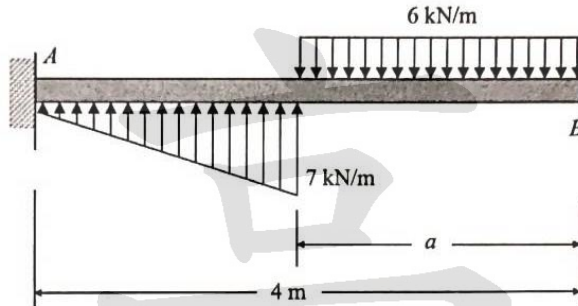
由函數求極值觀念令 τ_x 微分一次為零可得極值位置。令 $\frac{d\tau_x}{dx} = 0$ ：

$$\Rightarrow h - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{h}{2} \text{ 即是斷面中間處，又本題 } y + \frac{h}{3} = \frac{h}{2} \Rightarrow \text{故可得 } \underline{y = \frac{h}{6}}.$$

三、圖示為長 4 m 之懸臂梁 AB ，受均布與分布載重作用。若其固定端 A 點之反力矩為零，試求：

(一) 均布載重施載長度 a 。(10 分)

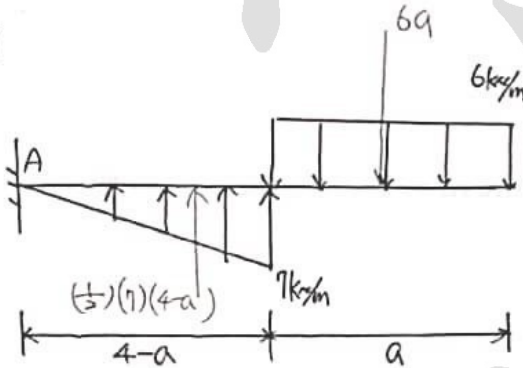
(二) 並繪出 AB 梁之剪力圖 (標示相關值或函數)。(15 分)



試題評析	屬於剪力彎矩圖基本題型
考點命中	與洪達老師講義P.3-9題型相同

解：

(1) 求 a ?

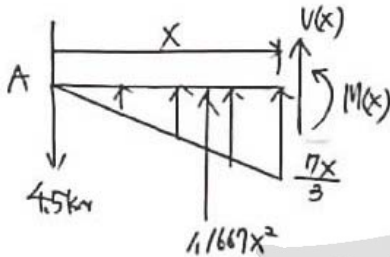
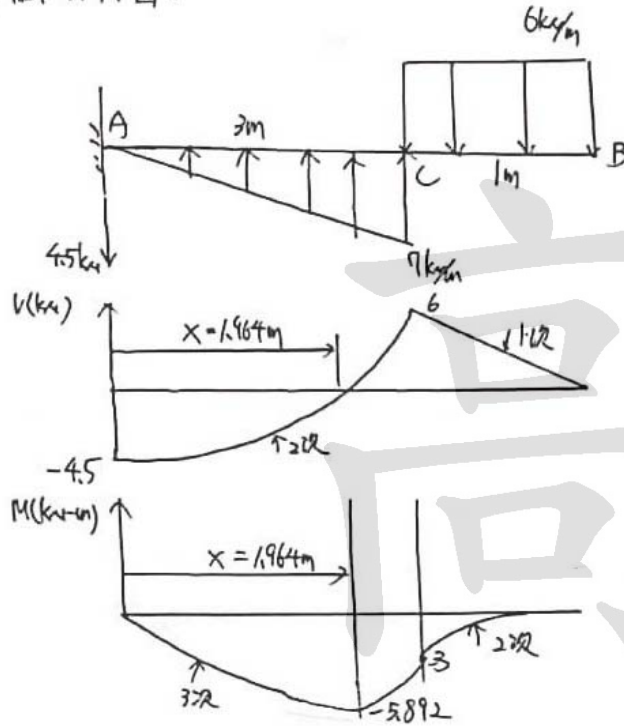


$$\because \sum M_A = 0 \quad (+)$$

$$\Rightarrow 6a(4 - \frac{a}{2}) - (\frac{1}{2})(7)(4-a)(\frac{2}{3})(4-a) = 0$$

$$a = 1, \quad 7 \text{ (不合)}$$

(2) 繪 V, M 圖:



$$V(x) = 4.5 - 1.1667x^2$$

$$M(x) = 4.5(x) + 1.1667x^2 \left(\frac{x}{3}\right)$$

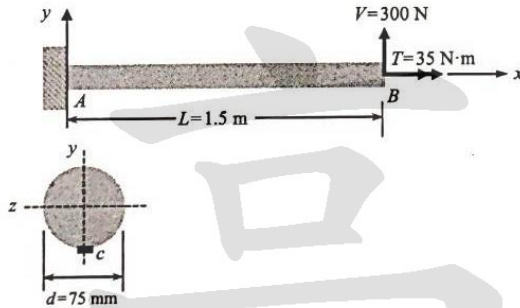
$$\text{令 } V(x) = 4.5 - 1.1667x^2 = 0$$

$$\therefore x = 1.964 \text{ m}$$

$$\therefore M_{\max} = M(x)|_{x=1.964} = -5.892 \text{ (kN-m)}$$

$$\therefore M_C = M(x)|_{x=3} = -3 \text{ (kN-m)}$$

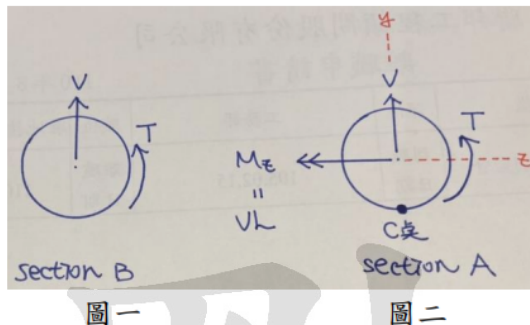
四、圖示為一懸臂實心圓棒固定在 A 點，自由端 B 點同時承受剪力 $V=300\text{ N}$ 和扭矩 $T=35\text{ N}\cdot\text{m}$ 作用。圓棒的長度 $L=1.5\text{ m}$ ，直徑 $d=75\text{ mm}$ 。試求位於固定端 A 點桿底面上的單元 c 處的主應力和最大剪應力。(應力集中效應忽略不計)(25分)



試題評析	合成應力就是高考很愛考的題型之一，類似題目在課堂上練習多好幾次了，本題亦算是送分題喔！
考點命中	1. 《國考材料力學重點暨題型解析》，高點文化出版，程中鼎編著，例題7.2.3。 2. 《材料力學(下)》，高點文化出版，程中鼎編著，例題7.2.7。

解：

1. 計算 A 斷面處所受之力



自由端 B 斷面處所受之力如圖一，斷面有向上剪力 $V=300\text{ N}$ 、正扭矩 $T=35\text{ N}\cdot\text{m}$ 作用。切出桿件 AB 段並進行力平衡分析可得 A 斷面受力情形，此時斷面除了有向上剪力 V 、正扭矩 T 尚有 z 軸正彎矩 M_z 值：

$$z \text{ 軸正彎矩 } M_z = VL = (300)(1.5) = 450\text{ N}\cdot\text{m}$$

因此 A 斷面共計有受到向上剪力 $V=300\text{ N}$ 、 z 軸彎矩 $M_z=450\text{ N}\cdot\text{m}$ 及扭矩 $T=35\text{ N}\cdot\text{m}$ 作用，如圖二所示。

2. 計算 A 斷面處 c 點主應力及最大剪應力

z 方向彎矩 M_z 會造成 c 點有 x 向撓曲正向拉應力 σ_x :

$$\sigma_x = \frac{M_z y_c}{I_z} = \frac{(450 \times 10^3) \left(\frac{75}{2}\right)}{\left(\frac{\pi \times 75^4}{64}\right)} = 10.865 \text{ MPa (拉應力)}$$

x 方向扭矩 T 會造成 c 點有 xz 向扭轉剪應力 τ_{xz} :

$$\tau_{xz} = \frac{T r_c}{J} = \frac{(35 \times 10^3) \left(\frac{75}{2}\right)}{\left(\frac{\pi \times 75^4}{32}\right)} = 0.423 \text{ MPa}$$

$$\text{圓心}(\sigma_{\text{avg}}, 0) = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}, 0\right) = \left(\frac{10.865 + 0}{2}, 0\right) = (5.433, 0)$$

$$\text{半徑} R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{10.865 - 0}{2}\right)^2 + (0.423)^2} = 5.449$$

由應力莫爾圓可知最大主應力 $\sigma_1 = \text{圓心} + \text{半徑}$ 、最小主應力 $\sigma_2 = \text{圓心} - \text{半徑}$:

$$\text{最大主應力 } \sigma_1 = \text{圓心} + \text{半徑} = 5.433 + 5.449 = \underline{10.882 \text{ MPa (拉應力)}}$$

$$\text{最小主應力 } \sigma_2 = \text{圓心} - \text{半徑} = 5.433 - 5.449 = \underline{-0.016 \text{ MPa (壓應力)}}$$

本題最大剪應力 τ_{max} 即是應力莫爾圓半徑 R，因此 $\tau_{\text{max}} = \underline{5.449 \text{ MPa}}$ 。