《結構學》

一、如圖1所示梁結構，d 點為滾支承，b 點為鉸接，各桿件都有相同之彈性模數 E 值與慣性矩 I 值，且 EI = 250000 kN-m^2，彈簧係數 k = 6000 kN/m，e 點有一向下的沉陷位移Δ_e，當 b 點及c點各承受垂直集中載重72 kN時，梁結構的彎矩圖如圖1所示。求彈簧內力、c 點及 e 點的垂直位移。（25分）

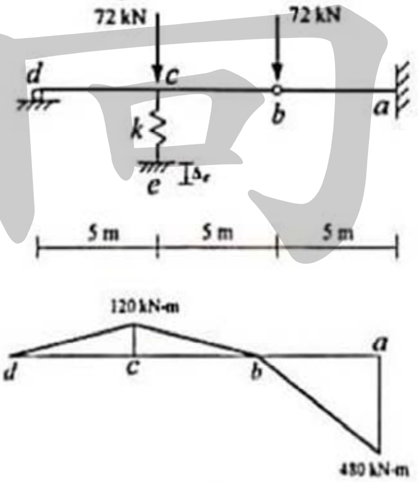
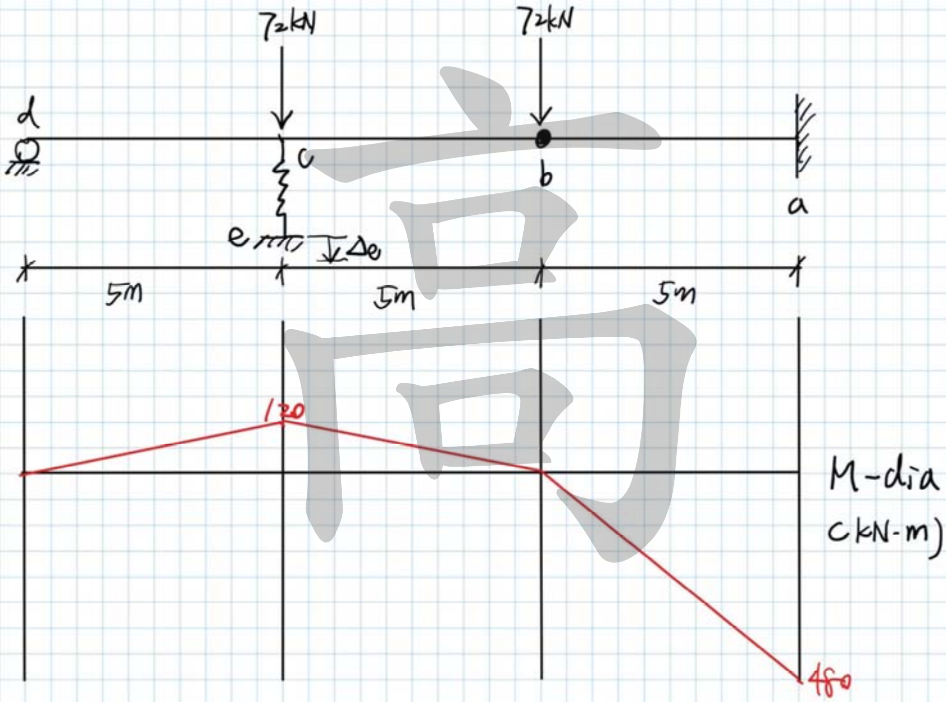


圖 1

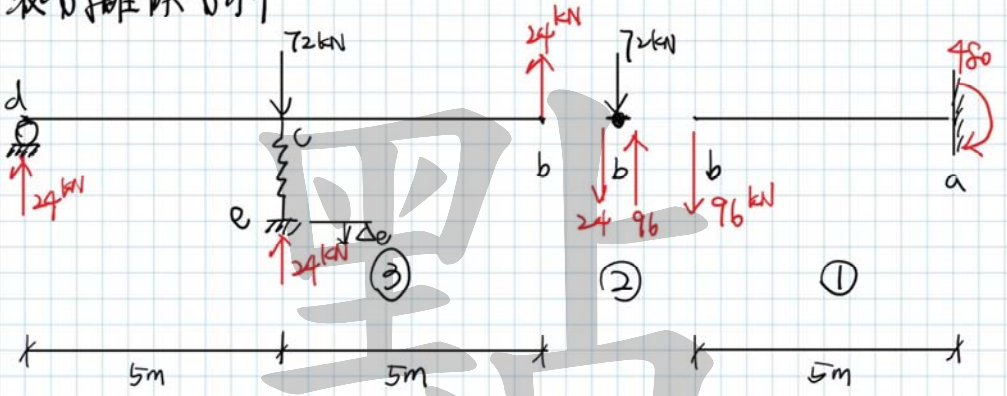
試題評析	本題別出心裁。一般都是廣義外力與外力作用下，利用力法分析靜不定內力，本題確反過來考，給定了靜不定結構的內力，反求廣義外力。無論如何，還是回到基元結構跟變形諧和條件，即能順利求解。
考點命中	高克剛老師《結構學》講義例題〔6-11〕

解：

1. 由題目給定條件



取分離体分析

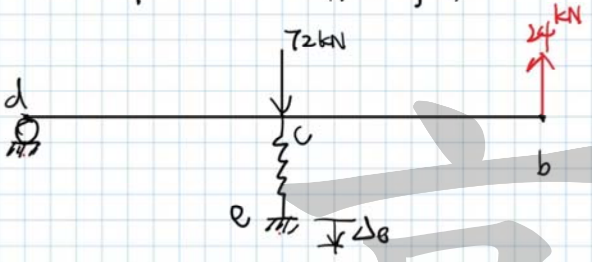


由①分離体 $\Sigma M_a = 0 \Rightarrow V_{bR} = -96^{kN}$

②分離体 $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_{bL} = -24^{kN}$

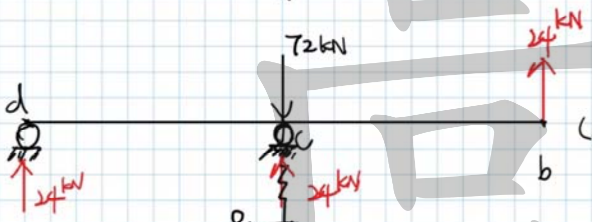
③分離体 $\Sigma M_c = 0 \Rightarrow b_y = 24^{kN}(\uparrow)$; $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow e_y = 24^{kN}(\uparrow)$

由③分離体(基本結構)計算 Δ_{bL}



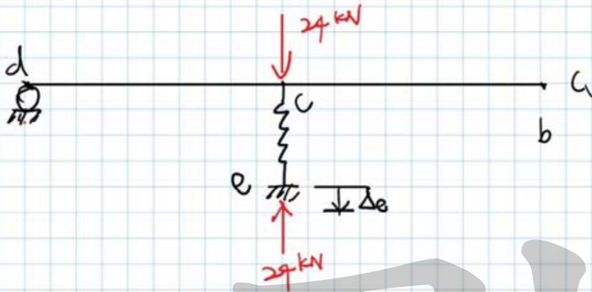
Δ_{bL}

=



$$(\downarrow +)\ \Delta_{bL1} = -\frac{(24)(5)^3}{3EI} - \frac{(24)(5)(5)}{3EI}(5)$$
$$= -\frac{(24)(5)^3}{3EI} \times 2$$

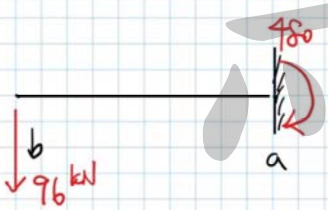
+



$$(\downarrow +)\ \Delta_{bL2} = \frac{24}{k} \times 2 + \Delta_e \times 2$$

$$\therefore (\downarrow +)\ \Delta_{bL} = \Delta_{bL1} + \Delta_{bL2} = \left[\frac{24}{k} + \Delta_e - \frac{(24)(5)^3}{3EI}\right] \times 2$$

由①分離体計算 Δ_{bR}



$$(\downarrow +)\ \Delta_{bR} = \frac{(96)(5)^3}{3EI}$$

由變形諧合條件 $\Delta_{bL} = \Delta_{bR}$

$$\Rightarrow \left[\frac{24}{k} + \Delta_e - \frac{(24)(5)^3}{3EI}\right] \times 2 = \frac{(96)(5)^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow \Delta_e = \frac{(48)(5)^3}{3EI} + \frac{(24)(5)^3}{3EI} - \frac{24}{k} = \frac{(72)(5)^3}{3\times 250000} - \frac{24}{6000} = 8\times 10^{-3}\ m$$

彈簧內力 $N = -24^{kN}$ (壓)

c點垂直變位 $\Delta_{cv} = \delta_s + \Delta_e = \frac{24}{k} + 8\times 10^{-3} = 0.012\ m\,(\downarrow)$

二、如圖2所示剛架結構，不考慮桿件的軸向變形，*a* 點及 *e* 點為鉸支承，桿件有相同彈性模數 *E* 與慣性矩 *I*，且 $EI = 40000$ kN-m^2。求 *cd* 梁桿件的彎矩圖、*b* 點及 *c* 點的水平位移。（25分）

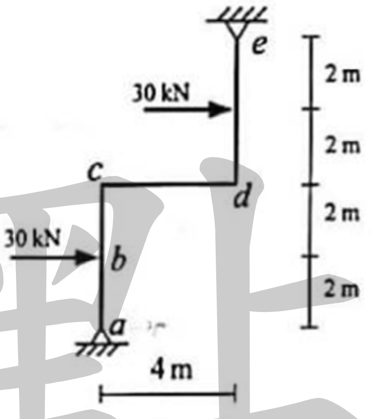


圖 2

試題評析	本題為三自由度位法題型，並且引誘考生以反對稱求解，本題最好是在三個自由度的假設下，利用綜合彎矩分配法，降低方程式數量。
考點命中	高克剛老師《結構學》講義例題〔8-9〕

解：

2、假設 cd 桿向右側移 Δ，採綜合彎矩分配法解

(a) $k_{ca}:k_{cd}=\frac{3EI}{4}:\frac{6EI}{4}=1:2$

$k_{dc}:k_{de}=\frac{6EI}{4}:\frac{3EI}{4}=2:1$

(b) 側力造成 $FEM_{ca}=\frac{3}{2}\frac{(30)(4)}{8}=22.5$

側移造成 $FEM_{ca}=\frac{2EI}{4}\left[-1.5\left(\frac{\Delta}{4}\right)\right]=-\frac{3EI}{16}\Delta=-2y$

側力造成 $FEM_{de}=-\frac{3}{2}\frac{(30)(4)}{8}=-22.5$

側移造成 $FEM_{de}=\frac{2EI}{4}\left[-1.5\left(-\frac{\Delta}{4}\right)\right]=\frac{3EI}{16}\Delta=2y$

	ca	cd	dc	de
DF	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
FEM	$22.5-2y$			$-22.5+2y$
DM	$2x$	$4x$	$-12x+4y-45$	$-6x+2y-22.5$
COM		$-6x+2y-22.5$	$2x$	
M	$2x-2y+22.5$	$-2x+2y-22.5$	$-10x+4y-45$	$-6x+4y-45$

由 $\Sigma M_d=0$

$\Rightarrow M_{dc}+M_{de}=0$

$\Rightarrow -16x+8y-90=0$ ——(1)

由整体 $\Sigma F_x=0$

$\Rightarrow a_x-e_x+60=0$

$\Rightarrow \frac{M_{ca}-30\times2}{4}-\frac{M_{de}+30\times2}{4}+60=0$

$\Rightarrow M_{ca}-M_{de}+120=0$

$\Rightarrow 8x-6y+187.5=0$ ——(2)

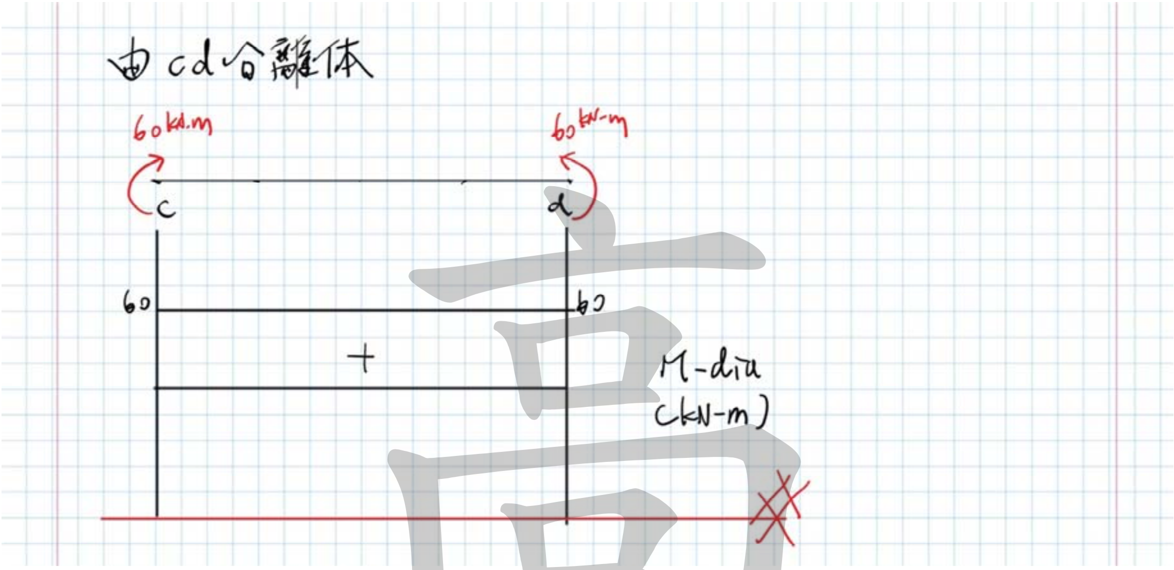
聯立(1)(2)，得

$x=30$

$y=71.25$

$\therefore M_{ca}=-60^{kN\cdot m}$、$M_{cd}=60^{kN\cdot m}$、$M_{dc}=-60^{kN\cdot m}$、$M_{de}=60^{kN\cdot m}$

c、d 水平位移 $\Delta=\frac{16}{3EI}\times2y=\frac{16}{3\times40000}\times2\times71.25=0.019\,m(\rightarrow)$



三、 如圖3所示桁架結構，a、b、c 點為滾支承，e 點為鉸支承，各桿件有相同彈性模數 E 與斷面積 A。當單位載重在桁架底弦移動，分別求 a 點反力、b 點反力、c 點反力、mn 桿件軸力及 nk 桿件軸力的影響線。（25分）

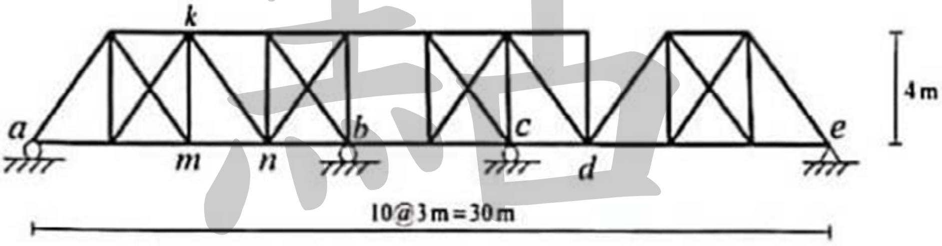
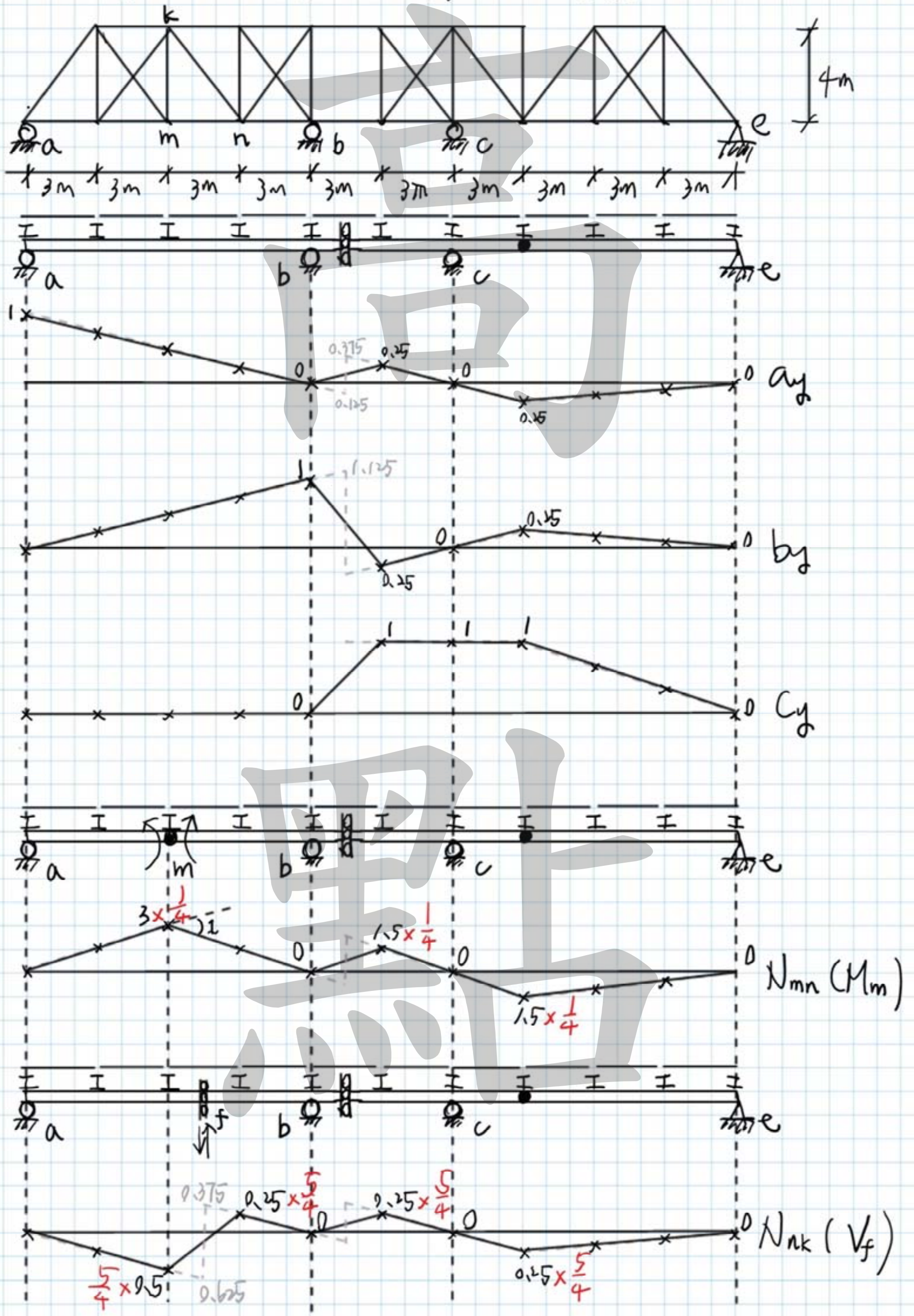


圖 3

試題評析	本題看似考靜不定桁架影響線，但實際上是考桁架的似梁法。考生必須熟悉靜定梁影響線的畫法，以及梁與桁架的轉換關係。
考點命中	高克剛老師《結構學》講義例題〔10-5〕

解：

3、本題雖為靜不定桁架，但欲求力素之影响線皆為靜定区，故可視為靜定梁繪影响線



由 M_m 與 N_{mn} 之關係：

$$M_m = N_{mn} \times 4 \Rightarrow N_{mn} = \frac{1}{4} M_m$$

由 V_f 與 N_{nk} 之關係：

$$V_f = N_{nk} \times \frac{4}{5} \Rightarrow N_{nk} = V_f \times \frac{5}{4}$$

四、如圖4所示三層樓構架，各樓層承受水平外力，構架梁柱桿件的彈性模數都是 E，另構架之柱桿件斷面慣性矩都為 I，且 $EI = 97200$ kN-m^2，而構架之梁桿件斷面慣性矩為無限大。不考慮構架梁柱桿件的軸向變形，求 c 點水平位移、b 點水平位移、a 點及 m 點固定端的水平反力與彎矩。（25分）

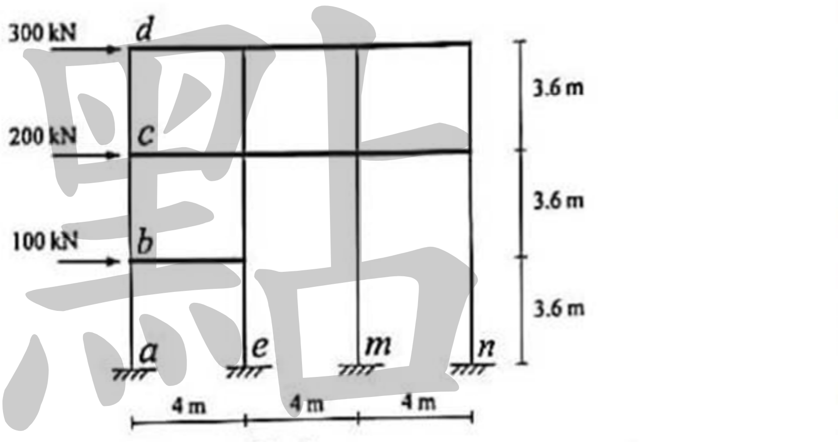
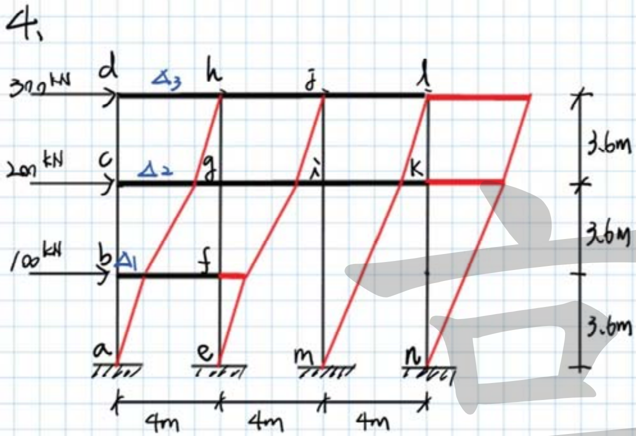


圖 4

試題評析	本題考三層的剪力屋架，算是4題中最直接的考題，留意計算即可。
考點命中	高克剛老師《結構學》講義例題〔7-5〕

解：

4、



假設各層側移 Δ_1、Δ_2、Δ_3，採傾角變位法

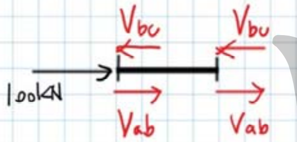
$$M_{ab}=M_{ba}=M_{ef}=M_{fe}=\frac{2EI}{3.6}\left[-3\left(\frac{\Delta_1}{3.6}\right)\right]=-45000\Delta_1$$

$$M_{bc}=M_{cb}=M_{fg}=M_{gf}=\frac{2EI}{3.6}\left[-3\left(\frac{\Delta_2-\Delta_1}{3.6}\right)\right]=-45000(\Delta_2-\Delta_1)$$

$$M_{mi}=M_{im}=M_{nk}=M_{kn}=\frac{2EI}{7.2}\left[-3\left(\frac{\Delta_2}{7.2}\right)\right]=-11250\Delta_2$$

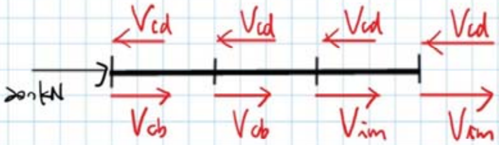
$$M_{cd}=M_{dc}=M_{gh}=M_{hg}$$
$$=M_{ij}=M_{ji}=M_{kl}=M_{lk}=\frac{2EI}{3.6}\left[-3\left(\frac{\Delta_3-\Delta_2}{3.6}\right)\right]=-45000(\Delta_3-\Delta_2)$$

由 bf 梁合離体 $\Sigma F_x=0$



$$100+2V_{ab}-2V_{bc}=0$$
$$\Rightarrow 2\,\frac{2M_{ab}}{3.6}-2\,\frac{2M_{bc}}{3.6}+100=0$$
$$\Rightarrow M_{ab}-M_{bc}+90=0$$
$$\Rightarrow -45000\Delta_1+45000\Delta_2-45000\Delta_1=-90$$
$$\Rightarrow 90000\Delta_1-45000\Delta_2=90 \quad\text{—— (a)}$$

由 cgik 梁合離体 $\Sigma F_x=0$



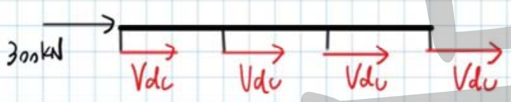
$$200+2V_{cb}+2V_{im}-4V_{cd}=0$$
$$\Rightarrow 2\times\frac{2M_{cb}}{3.6}+2\times\frac{2M_{im}}{7.2}-4\times\frac{2M_{cd}}{3.6}+200=0$$
$$\Rightarrow M_{cb}+\frac{1}{2}M_{im}-2M_{cd}=-180$$

⇒ $-45000(\Delta_2-\Delta_1)-\frac{1}{2}\times 11250\Delta_2+2\times 45000(\Delta_3-\Delta_2)=-180$

⇒ $-45000\Delta_2+45000\Delta_1-5625\Delta_2+90000\Delta_3-90000\Delta_2=-180$

⇒ $45000\Delta_1-140625\Delta_2+90000\Delta_3=-180$ ———— (b)

由dhjl梁分離體 $\Sigma F_x=0$



$300+4V_{dc}=0$

⇒ $4\times\frac{2M_{dc}}{3.6}=-300$

⇒ $-45000\Delta_3+45000\Delta_2=-135$

⇒ $45000\Delta_2-45000\Delta_3=-135$ ———— (c)

聯立(a)(b)(c)，得

$\Delta_1=9.8\times10^{-3}\ m=\Delta_{bH}$ (→) #

$\Delta_2=0.0176\ m=\Delta_{cH}$ (→) #

$\Delta_3=0.0206\ m$

∴ $M_a=-45000\Delta_1=-441$ kN-m (G)

$M_m=-11250\Delta_2=-198$ kN-m (G) #